

querenda del agua contaminada; el mayor porcentaje del Baño Chaparral del procesamiento de aceites en el departamento de Cuzco, donde, a su vez, el 70 por ciento del agua contaminada, viene a ser, el 90 por ciento, utilizada en aguas contaminadas.

1998

LA ARITMETICA COMO CIENCIA

Copyright © 2004 by John Wiley & Sons, Inc.

La actividad es uno de los tres caminos que han seguido siempre en los programas de las escuelas comunes, por su carácter intrínseco, como es, por tanto, de importancia capital como instrumento en los asuntos de la vida, aparte de la que pueden tener como procedimientos de la educación. Emplearlos metodológicamente es de una alta importancia que cualquier educador debe necesariamente prever que puede tener de ellos, pero lejos de despreciar este último, debemos considerarlo como el objeto inmediato de la enseñanza común de esos cursos. De distintos modos y en diferentes grados, el estudio de estos los fundamentos puede ser medio eficaz de cultivo intelectual, y tiene que ser considerado más que forzoso la adquisición de la habilidad práctica, el maestro debe considerar en todo caso de la enseñanza, el modo de alcanzar verdades que se enseñan.

La existencia de la que acabamos de decir, es crucial con respecto a la aritmética, en esta que la existencia de ella debe darse teniendo dos líneas vitales, una especial y la otra general.

[illegible]

Respecto a la latencia, primero para competir, basta decir que compete en la velocidad, en la rapidez y en la libertad y que simultáneamente debe considerarse en el orden de su importancia.

Una descripción más detallada es necesaria para mostrar en qué se funda la importancia de la actividad como disciplina intelectual.

© 2007 The Authors
Journal compilation © 2007 Blackwell Publishing Ltd

2.2. Interactions pédagogiques autour du langage et des savoirs

En toda operación matemática hay dos cosas que aprenden la regla que dirige, y la teoría de que la regla es la expresión... Ambas son necesarias y diferentes enseñar cada una con referencia a la otra, la teoría con una idea la regla, y la regla como enseñada en la teoría.—No es menos evidente de la inteligencia, más de la regla la teoría, que deducir de la teoría la regla.

Para disponer cualquier operación, el usuario debe estar autorizado a las operaciones que desea realizar. El sistema garantiza que los usuarios no pueden realizar operaciones que no estén permitidas por sus permisos.

tra, clare, y 20 es su opuesto, ¿cuántos boleros de colores clare tienen desaparecidos? La operación numérica es simplemente $200 - (50 + 20) = 130$; y así que otro problema es un hombre de 200 — $(50 + 20) = 130$; y así que otro problema es un hombre de 200 años de edad, cuyo sueldo es 5 pesos de una cada semana, 20 años de edad, cuyo sueldo es 20 pesos en cada trimestre, ¿cuántos y cuyos pesos recibirá en 20 meses en cada trimestre, ¿cuántos, habiendo abarcado cuando tenga de edad? Las operaciones numéricas, en $(200 - 20) \times 5$, $(50 - 20) \times 20$.

Pero en cada caso la solución del problema, requiere un ejercicio mental muy diferente sólo para el procedimiento numérico. En el caso en el cual el discípulo qué relaciones existen entre los números con que se ha de operar, en el otro, tiene que descubrir las relaciones, mediante la reflexión, sobre las condiciones, entre los números, mediante la reflexión, sobre las condiciones, para, del caso. En el caso de la operación una operación numérica, para, la cual tiene una regla en el otro, tiene que hallar la regla por el mismo. El caso pone al prueba el conocimiento del discípulo sobre algo que él ha aprendido; el caso, en poder para usar la regla que ha aprendido. El trabajo de planear operaciones numéricas no es, en verdad, de naturaleza puramente mecánica, porque el discípulo no puede dejar de comparar las diferentes operaciones una con otra, los números de mayor ó menor dificultad bajo las diversas reglas, puede tener que considerar la propiedad de operar los pesos en diferentes órdenes ó sobre expresiones para, obtener el mismo ó los resultados. Por lo tanto, el padre requiere para todo esto de simplemente decirle, con un, total, para operaciones que se sean numéricas, y en tanto que la habilidad del discípulo, para operaciones técnicas, se comienza con el ejercicio, éste no puede tener sino un débil efecto sobre el juicio, más el método se limita exclusivamente al descubrimiento de los resultados, por medio de datos empíricamente establecidos y arreglados.

Si el maestro quiere cultivar la inteligencia general de su discípulo, acostumbrarlo á las inferencias de reflexión, con qué por el mismo han de arreglar los datos, así como á operar sobre ellos cuando están arreglados; pero el ejercicio de esta inteligencia general no consiste tanto, en regular las reglas bajo las circunstancias en que se aplican, no siendo datos, como en determinar la conveniencia en que las reglas se aplican y los límites que más convenientemente imponen á la aplicación de las

diversas reglas. En el ejercicio de esta inteligencia, lo que la habilidad de las reglas implica, y en particularidad de una las técnicas de educación, que la percepción y la claridad del punto del discípulo en cada problema, según se encuentra en la interpretación de las condiciones, debe ser representada en el lenguaje exacto de los símbolos numéricos. El discípulo puede haber hecho muy poquito por el trabajo de una sola semana de operaciones, y después encontrarse atascado por el más simple problema. De una posición que le deja en una difícil situación, no puede decirse que le será altamente provechosa para los números de la vida, puesto que la vida es, para los niños, el problema y no la regla.

El maestro debe, pues, ocupar tiempo y sistemáticamente á sus discípulos, en ejercicios ó problemas de aplicación. Estos pueden variar, todos, sobre las operaciones, principando por la más simple, y no hay límite para su variedad. Pero debe tenerse la mayor precaución en graduarlos respecto á su dificultad, porque el discípulo, aunque puede aprender prontamente un principio, procede naturalmente con lentitud y peregrinidad, cuando lo aplica. El modo de emplear los ejercicios de número en la enseñanza de la gramática, requiere el modo de emplear los ejercicios de aplicación en la aritmética. Aquellos son instituidos en grupos para poner á prueba el conocimiento del discípulo, sobre las varias reglas, y después presentados en combinaciones para que él halle por el mismo las reglas y su aplicación.

Lo mismo debe hacerse en la aritmética; el maestro introduce ejercicios de aplicación sobre cada regla, eligiendo solamente del discípulo que halle la manera de aplicarla; después los presenta combinados de modo que incorporen varias reglas; pero en cada caso, como siempre que la que el maestro en la interpretación del problema. Ya sea **descubriendo** respuestas á una regla conocida, ó en combinación, debe ser cuidadosamente graduados en cuanto á la dificultad de su construcción; una importante parte no ha sido bastante considerada á causa de la creencia errónea de que los ejercicios son por su naturaleza demasiado sencillos para admitir ciertos grados. Al concluir en clases por una serie de ejercicios aplicados, el maestro

debe tener presente que cada problema no es más un simple ejercicio como una especie de ejercicio, y que necesariamente ejercido como una especie de ejercicio, cuando el discípulo lo resuelve, como será de la mayor claridad, cuando en otras formas de lenguaje y en simple ejercicio, presentándose en otras formas de lenguaje y en simple ejercicio, para la verdadera disciplina consiste en una sucesión sucesiva, para la verdadera disciplina consiste en una sucesión sucesiva y aumentando para reconocer los principios bajo todas formas en que tales pueden presentarse. Además, si un problema sucesivo de una solución, el maestro debe dejar al discípulo libre para elegir una por sí misma, pero cuando llega una situación en la actualidad a dar la obra. Este proceder para una solución sucesiva de tiempo al maestro que no consigue que cada cuando el discípulo hace cualquier cosa, tales ejercicios es obtener los resultados para la adecuación y propiedad de la obra, más o menos para que cuando la obtención de los resultados sucesivos, solamente como un medio para un fin de solución importante: el objeto de las lecciones intelectuales de un discípulo.

IV.

Numeración oral

Cuando una clase comienza el estudio de la aritmética como ciencia, su primer objeto es aprender la numeración, esto es, el sistema que empleamos en nuestros cálculos y la manera de preparar los números según ese sistema. Entre dos números no pueden establecerse en la mente del maestro, sino que toda es una relación relativa a la numeración se haga sencilla, es por uno y es un número. Al mismo tiempo, estos números, están ligados entre sí, de modo que deben considerarse en una dependencia.

Primero se enseñará la numeración oral, y para esta la necesidad de explicación ocurrirá desde luego con el número 13.—Respecto a los nueve primeros números, bastará observar que en se deben designar de la manera indeterminada, que comen-

mente se emplea, diciendo, 1, 2, 3, etc., más sistemáticamente una unidad, dos unidades, tres unidades, etc., pero los nombres, uno, dos, tres, etc., se aplican a los varios grupos que se han de formar de decenas ó docenas, etc.; y la aproximadamente equívoca apropiación de esos nombres a las unidades, que implica la misma explicación de designarlas, es un obstáculo para la percepción del principio de la numeración. Cuando la clase llega al número diez, el maestro llama la atención hacia el hecho de que una unidad considerando como una decena ó grupo. El número es un diez ó una decena, y está convenientemente llamado así. Continuando más allá de diez, la cuenta comienza otra vez con las unidades, convirtiéndolas como agregadas al un diez ya agregado; de modo que los números en marcha son un diez y uno, que la clase aprende a llamar por un diez y once, un diez y dos, etc., hasta que la cuenta llega a diez docenas ó ciento; después de lo cual comienza de nuevo la misma operación de acción gradual por unidades. Cada paso en la cuenta será puesto a la vista en la pizarra. El aprendizaje de diez docenas (cuando se alcanza en un mismo grupo llamado un ciento) bajo el mismo principio que la reunión de diez unidades en un diez, puede formar un punto por corto período de tiempo. Hasta este punto la numeración es enteramente oral.

Si se nos pregunta si en este período el maestro debe procurar que los discípulos comprendan porqué el agrupamiento es por docenas, la respuesta será que esto nunca se puede hacer inteligible para los niños, y que el maestro puede, relacionado el diez con los diez dedos, satisfacer cualquier deseo que ellos manifiesten sobre el particular; pero toda investigación sobre los diferentes métodos debe estar dentro hasta un período posterior.

V.

Numeración escrita

El maestro debe aplicar en seguida la numeración escrita, y aquí se manifiesta otra vez la necesidad de que la explicación

3.—Similitud, por correspondencia, de sumar por pasos sucesivos y cambiar los resultados parciales.

4.—Como sea, para este objeto: las unidades (5, 6 y 7), sumadas primero en columna, para formar el resultado parcial 18, y luego las decenas (3, 1 y 2), sumadas también en columna, para formar otro resultado parcial 4 decenas. Las unidades se toman juntas, y las decenas, juntas también, por ser respectivamente de la misma especie.

5.—La combinación de las dos similitudes parciales en un resultado final, por llevar una decena de la suma de las unidades a la suma de las decenas, según sigue el principio de la misma regla.

6.—Se recuerda la regla, formando cada una de sus frases con referencia a los pasos de la operación sucesivamente ejecutada, y en una ó dos más semejantes a ella, si se cree oportuno.

7.—En la práctica subsiguiente, cuando se trabaja sobre ejemplos, en la pizarra, el maestro debe, no solamente observar la operación correctamente ejecutada, sino también cada paso correspondiente a la regla, que ha sido aprendida.

Cuando el discípulo se ha familiarizado con la regla, el único punto á que hay que atender, es, al graduar la práctica, de modo que las operaciones sean sucesivamente más complejas, así las clases de ejemplos se ordenarán en el orden de las siguientes: $81475+38$, que se practica en la pizarra la expresión en símbolos, de lo que antes se ha hecho oralmente; $3446+48$, que no implica llevar nada de una columna á otra, sino solamente el principio de operar por partes, $38456+8$, en que llevar de una columna á otra implica otro recurso al principio de la numeración $3844+56+124$, $123+345+578$, $181+567+12+89$, y después combinada con otras.

Observaciones

Las mismas observaciones, con respecto á la aplicación y la graduación, se aplican con ligeros cambios á la restaración.—

Uniformemente en el punto 4 se ha de observar de qué modo los cuatro pasos de la operación requieren estar propiamente ordenados, uno de ellos por descomposición á saber: en decenas distributivas, según se practica, la operación de cambiar planes de moneda por otras inferiores, y en el punto 5, que la combinación de los resultados parciales alcanza el final por simple superposición.

Se supone que el método de hacer la restaración, obra, según antes por la alteración del minuendo, porque depende del mismo principio que la adición, á saber el principio de la numeración, y también pueden ser empleados ejemplos como:

El método de adición iguala introduce el sistema de que la diferencia de dos números es siempre el mismo con igualdades aumentadas por adición, y esta será aplicada antes de emplearlo en la operación.

800, si un número de balas contiene 30 más que otro, la diferencia es la misma siempre en cada uno sean pocas ó 30 balas más; si un estudiante tiene 4 reales más que otro, será tan rico el uno como el otro, aunque luego á tener un real más, $33-4=29$ — $34-5$. Aplicando este sistema al número explicado cuidadosamente, que el 38 ó el 58, introducido, es por adición, que se agregado á ambas líneas, y que se agregado á cada línea en diferentes formas. Los ejemplos serán expresados inmediatamente en ejemplos como las siguientes:

		543
		765

4	(18)	53 (18)
7	8	36
2	1	8

donde hay un cambio solamente en la forma del minuendo, y

5	4	(18)	5	34	(18)
7	8		8	7	8
2	1		8	2	1

desde hoy también, tanto en la forma del número como en la del instrumento.

Antes procedíamos con casi igualmente sencillez en la práctica, pero el primero tiene ventaja por la sencillez del principio en que se funda.

Los números que servían con pocas para presentar dificultad al discípulo en el cambio de una unidad en otra de diez decimos, y no podían menos de ocasionar dificultad al no introducir brevemente un número de veces, para no ser necesario que haga con dificultad, y no la había ni tales cuestiones tan convenientemente presentadas, y el discípulo se confundía con el manejo de un con tanto de trabajo con diez, y al tra-
 ba-
 ba, con dos años que con tres. La dificultad por medio del cambio del dinero, presta un servicio en esto. Es necesario que pague 400 de real, quítale uno real, cuando se leamos reales, y si son reales reales, 1 1/2 en reales, y 1 real en 400, pero el número cuatro presenta que no debe operarse ni proponer desde el principio operaciones de sustituciones con números muy grandes, por la misma necesidad al hábito de la numeración, la gran magnitud de los números ocasiona al discípulo.

Las pruebas de las operaciones sencillas se hacen como las operaciones mismas, por ser igualmente importantes, como operación mental. Sin embargo, no se daña físicamente, más con el mismo recurso, á la inteligencia, cuando son posibles. Así, en a adición, ella consiste en considerar que la suma de varios números así la misma, cualquiera que sea el orden en que los sumamos; y en la sustracción, que lo que quedamos de una cosa, y lo que dejamos de ella, deben juntos componer la cosa misma. En la práctica se hará que el discípulo opere brevemente la prueba de su trabajo, tan luego como pueda comprender la diferencia que hay entre la operación y la prueba, en aplicación y después.

VIII.

Aplicación de la adición y sustracción

La utilidad de la práctica real ó mental en la preparación para la operación misma, ha sido ya mencionada, y con pocas

debe considerarse inmediatamente con la teoría, á fin de que la utilidad para ambos. Ha de observarse necesariamente de donde nace en el principio de la regla, para la aplicación mental, que consiste en hacer repeticiones mentales, vale poco el tiempo de ella debe ser las facilidades de computación con arreglo al principio. En el mismo tiempo, ella aplica de cualquiera modo al principio, el así puede abstrairse más profundamente el resultado. — Por ejemplo, en la adición mental de 40 y 20, el principio de la operación se aplica más convenientemente, cuando primero la notamos de las decenas, y continuando luego la suma de las con la suma de la columna de las unidades. Lo mismo en la sustracción mental, como por ejemplo, 30—10, el principio se aplica mejor considerando primero las decenas, y entonces queda reducida la operación á 40—10=30, semejante repeticiones están muy distantes de ser mecánicas.

En ambas reglas, la operación no debe estar limitada como demasiado en la está, á la obtención de unidades de centenas abstratas, para con tales unidades se opere, cuando desemos sumar 100 y 100, ó restar 100 de 200. De suma de varias repeticiones se debe evitar, y la respuesta empieza en la de sumas uniformemente como estas cosas de la especie mencionada. — Además, las decenas, las centenas, etc., deben ser numeradas al evento de la operación, así el se suman 20 decenas y 20 decenas, primeros decenas resultando, á el sumamos 10 cent. de 20 cent., resultan cent. cuadrado, y la respuesta será expresada completamente en unidades y decimos. Con semejante práctica, el discípulo adquiere un método de suma sobre la memoria, cuando puede operar con decenas, centenas, etc., como con unidades.

En las lecciones sencillas de el está convenientemente introduciendo luego la adición y la sustracción de números complejos con aplicación al dinero. Sin duda que se requiere una escuela diferente para llevar á esta altura de operación inmediata superior la parte que le corresponde de la de operación inmediata inferior; pero el niño puede habituarse á ya le es familiar el cambio del dinero. Considerando la utilidad y el interés que esta aplicación de las reglas tiene para él, parece conveniente ocuparse en ella; pero graduando del mismo modo que las cuestiones sobre ar-

estas unidades; primero, la adición de unidades hasta 10; luego la misma, dando una unidad mayor que el peso de individualmente la unidades; en seguida pesos y unidades sin unidades; después una reducción, y ultimamente de un peso a una reducción de pesos.

12.

La multiplicación

Precediendo a la multiplicación y la división, lo primero es que se les de entender en el al discípulo una concepción clara de las operaciones en que se le trabaja. Muchas dificultades fundamentales no pueden comprender lo que hacen fuera de lo que se llama presente a concreto, según el caso. Por medio de un ejemplo familiar, se le hará claro que en un caso tenemos presentando hallar la cuanto-muchedumbre de adición de un número tantas veces a sí mismo, y en el otro espaldas veces un número está contenido en otro. Ambas son operaciones aritméticas del mismo tipo matemático: la una, por ser precedidamente objeto de contar, se le da énfasis con referencia a una operación, y la otra, por ser un precedidamente abstracto de contar, se fundamenta en referencia a una operación, para de este manera el discípulo no pierda la conexión de ambas, sino que profundizar en sus relaciones a las precedencias naturales de la adición y sustracción.

La tabla de multiplicar es el resultado de la multiplicación y de la división. Ha de ser construida con ayuda de la División sucesiva para que el discípulo pueda ver lo que significa la palabra veces; y después, por frecuentes repeticiones, en unidades de diez figue en la memoria; si él no puede darlos con exactitud inmediata, no sabe inmediatamente la tabla. La práctica mental puede ampliarse con gran ventaja para aprender esta tabla, fuera de su límite ordinario en la línea 12" a 30" a 34".

En la producción de los ejercicios, el multiplicador debe considerarse primero en las unidades sucesivamente; y el modo de ob-

tener y construir los productos parciales está bien descrita. Estas operaciones servirán de modelo para los estudiantes en que los multiplicadores están los divisiones en unidades. En caso de dificultad en operación en multiplicar por unidades y divisiones sucesivamente, y de la comprensión de los resultados (en el mismo caso, con o sin unidades), dependará en progreso en la serie (comenzando de ejercicios en que el multiplicador consista en unidades y unidades). En la multiplicación por un número tal como 11, la dificultad del número está en dividir la línea segunda de la operación, en decenas el 1 con la palabra 11, porque esto es combinar la idea de cuatro decenas sucesivas y completar la operación. Haga que el discípulo diga 11 y que por algún tiempo multiplique por ese número, como si se quisiera hacer un ejercicio separado, y después que, recordando el hecho de que son decenas, considere cual será la disminución del producto. En tal caso en este asunto dependará de como haya construido la multiplicación mental y los pasos parciales de la multiplicación.

13.

Reducción

Esta precedencia debe darse largo tiempo al discípulo cuando le enseñamos las tablas de medidas, pesos y monedas como si fueran tablas de números abstractos. Supongamos que en un ejercicio pedimos en las fundaciones con ellas por observación de cada una individualmente, por misma comparación de las unidades en cada tabla y por la aplicación de ellas, y que en realidad puede construir las tablas por el mismo tiempo del conocimiento del al discípulo. Si es así, el procedimiento no presentará ninguna dificultad, puesto que es simplemente la multiplicación aplicada a diferentes expresiones de cosas, en unidades. A una o dos palabras principio, que él puede comprender fácilmente. Un ejemplo sugiere como un niño: 1 En 10 centavos 10 c. y 2 p. a cambio plus hay 5. La palabra ciento es

en de 2 cosas de un solo momento y otras tantas sucediendo á 20 cosas en cada momento, ¿cómo habrá ocurrido cuando tenga 20 años?

1.ª - Lo que él ahora es al tiempo es la distancia entre lo que fuere en el tiempo y lo que pasa en el tiempo.

2.ª - Lo que él veía en el tiempo es lo que veía en una instantánea tomada tantas veces como momentos hay en el tiempo.

3.ª - Lo que él pasa en el tiempo es lo que pasa en un momento tomado tantas veces como instantes hay en el tiempo.

Estas tres consideraciones determinan que la operación principal ha de ser la enumeración y que las operaciones secundarias son de multiplicación. Si se tratare el problema hallando como pasa instantáneo lo que el hombre vivió en un momento y multiplicado tantas veces como instantes hay en el tiempo, habríamos tomado tres pasos, como ya queda indicado debe permitiendo al discípulo pensar su propio modo en el primer ejemplo.

En el segundo de los problemas analíticos, los dos pasos que implican una enumeración, en el tercero son el principal y los otros dos están subordinados; el uno determina la relación en que los datos han de estar con vista á la respuesta; y los otros la forma en que los datos han de estar para ser perfectamente útiles para la computación. En todos los problemas que podemos poner en este grado, el resultado se ha de hallar por una, dos ó tres pasos más ó menos de enumeración. En los primeros del currículo es á pesar en el resultado sólo, de modo, que suponiendo que el tiempo tiene sólo en los problemas una medida, es al número, en aquellos que son más complejos, un suceso de medición constante.

Cuando el problema consiste á tener una razón, proporción, totales en problemas que implican más de un paso, á demostrar lo que primero enumeran, antes que lo que es más importante por ser, debe ser elástico para distinguir lo principal de lo subordinado y procurar á la claridad de la solución datos de principios á tener los datos. El mayor número de los errores en el trabajo de los problemas analíticos ahora de no comprender los pasos del resultado en su expresión, y en no describir las operaciones elementales necesarias para resolverlos. Por esta razón, ya respecto á la exactitud de los resultados, ó al pro-

cedimiento que se deriva del ejercicio, el maestro debe ajustar el carácter de sus exposiciones por el grado de dificultad que él le al discípulo con los principios de los razonamientos que los problemas implican.

Una aplicación de las operaciones elementales en el procedimiento á que se ha dado la denominación de pasos elementales á disposición por primera vez, los pone en la exposición con los siguientes:

1.º - El primer ejemplo, como 1200 francos á peso á reales y á cuartillos. El discípulo se indicará naturalmente á optar por multiplicación, pero el objeto del procedimiento que se trata de enseñar es hallar un modo más breve de obtener el resultado.

2.º - El principio de los pagos parciales en la de francos con ejemplos fáciles. Así, si por una vez de pago pago un peso, luego dos reales, en seguida un real y después un cuarto, cuánto habrá pagado? Si 20 personas por su pasaje en un tren pago cada una primero 1 peso después 2 reales, luego 1 real y último cuatro 2 cuartillos, cuál es el precio del pasaje de cada una, y así, etc.

3.º - En seguida se introducirá un ejemplo como el siguiente. 1200 francos, á 2 pesos, á reales y denarios. La suma de pesos en esta forma:

FRANCOS	PESOS	REALES	DIENARIOS	CUARTILLOS	etc.
1200	4	8	0	0	En 1200
"	"	4	"	"	" 640
"	"	1	"	"	" 200
"	"	0	1	"	" 50
"	"	"	8	1	" 40
1200	2	4	1	1	En 2400

En que están implicadas tres de las operaciones elementales sugeridas por otros autores: principios de enumeración. Estos deben ser enseñados á distribuir en cada paso del procedimiento; y cuando se obenga el resultado, la clase será representada hasta que los niños puedan contar en todo paso. Se operarán algunos otros ejemplos con la misma abundancia de datos y datos.

4.º Principaremos por razones en que el precio cambia sólo en pesos y reales, y es importante observar que cualquier

real en algunas indicaciones y la construcción de las fracciones, todo tiempo y trabajo empleados en las construcciones serán ampliamente mercedados por los progresos que hará el discípulo cuando llegue a estas dos operaciones.

7. La segunda proposición es aquella en virtud de la cual constantemente $\frac{a}{b}$ (isto es $\frac{a}{b}$ de $\mathbb{Q}$) resta igual a $\frac{a}{b}$ de $\mathbb{Z}$. Se construyen en orden en una línea dividida en 1000 partes.

El discípulo construye fracciones semejantes para otros casos.

IV

Operaciones elementales con las fracciones

Las operaciones de sumar y restar dependen generalmente de la primera de las dos proposiciones mencionadas. No es la adecuada la motivación propiamente dicha, la que pertenece al estudio de el discípulo, sino la preparación de los ejemplos para el mismo. Si el discípulo ha sido debidamente enseñado a cambiar fracciones en equivalentes, la dificultad está vencida, y al mismo sólo le resta practicar judiciosamente los ejercicios.

1. Los más simples son tales como $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$; muchos de los cuales se harán realmente y también en la pizarra, en escribir las denominaciones más apropiadas con palabras, dando ocasión al discípulo al hecho de que la suma de las dos cantidades de la misma especie no cambia el nombre de ellas. Esta especie preliminar le libera del error no poco común de sumar las denominaciones así como las numeraciones cuando llega a operar con la numeración misma de los operandos.

2. Después hará ejercicios en que el denominador de la fracción sea múltiplo del de la otra como $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

3. Finalmente aquellos en que las denominaciones han de ser cambiadas por otra, como $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Las mismas observaciones se aplican a la resta, pero puede notarse como particularmente aplicable a esta operación que debemos ejercitar al dis-



cipulo en la composición de dos fracciones para que se haga antes de decir si primera resta real es la mayor, es $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{3}$ o $\frac{1}{4}$ o $\frac{1}{5}$.

Las operaciones de multiplicar y dividir dependen, generalmente de la segunda de las proposiciones mencionadas.

1. La primera especie de construcciones para operar son aquellas en que una fracción se multiplica o se divide por un número entero, como $\frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3}$ y $\frac{2}{3} \div 2 = \frac{1}{3}$, en que se han siempre cuatro operaciones (porque la misma se multiplica $\frac{2}{3}$ por 4 que $\frac{1}{3}$ o 2 dividido, más solamente un cambio de notación a que atender, teniendo conocimiento de que la denominación de la cantidad multiplicada o dividida queda sin cambio en esta operación como si se trataba de números.

2. En seguida se hacen ejercicios tales como $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3} \div \frac{1}{2}$, en que (aunque en el primero puede observarse el resultado en dos pasos de un modo nuevo, a saber: $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ y $\frac{1}{3} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$) la operación se ejecuta mejor inmediatamente. Las construcciones tanto para el modo nuevo como para el antiguo pueden hacerse con operaciones relativas a números; así podemos multiplicar 2 reales por $\frac{1}{2}$, tomando el real y reduciéndolo a peso, o tomando de una vez dos reales a peso.

3. En la multiplicación o división de una fracción por otra en donde uno viene de los elementos la preparación de que, por ejemplo, $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2} = \frac{2}{6}$ de $\frac{1}{2}$. Así multiplicando $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{2}$, damos, multiplicando a principio de las operaciones parciales) $\frac{1}{2}$ por como notamos que multiplicar por $\frac{1}{2}$ es por tanto a este producto debe ser 2 veces mayor, y el producto real solamente $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$, resulta $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Del mismo modo en la división. $\frac{2}{3}$ dividido $\frac{1}{2}$ principiamos diciendo $\frac{2}{3} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{2}$ (operaciones parciales) entonces, como hemos dividido por $\frac{1}{2}$ es por tanto dividido por una 2ª parte, este cociente es 2 veces mayor, y por consecuencia debe ser multiplicado por 2, para tener el cociente real $\frac{4}{3} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$. Después de una inducción suficientemente extensa en ejemplos de varias operaciones, enseñando las reglas haciendo notar bien su conexión con el principio, pero no basta esto solo.

XV

Proporción

1. El primer objeto es dar al discípulo una noción general de la relación matemática entre ciertos valores llamados proporciones, y entre un mismo objeto que sirve una misma de cualquiera de las operaciones elementales de la aritmética. En realidad, estas discusiones se han ocupado ya en que, al tratar de las cuestiones aritméticas; se han introducido al estudiante el principio de que el precio de una cantidad debe variar con la cantidad, y que considerando «que como 2 varas es el doble de 1 vara, el precio de 2 varas es doble del precio de una vara.» «Como 12 es triple de 4 varas, el precio de 12 varas es triple del de 4.» «Como 12 varas son una vez 2 varas, el precio de 12 varas es 2 el de 12.» «Como Thomas la 12 de 4 h, la distancia recorrida es 12, es la 12 de la que se recorre con la misma velocidad en 4 h.» En que los discípulos, antes que aprendan a que expresiones estas relaciones más concretamente, diciendo que «2 varas a 1 r.» el precio de 4 es el de 2; y que, como la aritmética, son unidades para discutir las demás relaciones, el método adoptado es 2 r. : 4 l. r. : : precio de 12.

Esta relación puede aplicarse luego a los números abstractos en una serie de ejemplos sencillos:

2. la 12 de 4 : : la 12 de 8 o 2 : 4 : 8. ó en la 12 de 24 : 12 de 48 : 24 de 48 : 24 : 12 : 48.

Después como al tratar de la aritmética se había ejercitado de varias formas para establecer en la mente del discípulo la asociación entre la relación misma, las palabras que la expresan y el símbolo que la denota. Así el maestro puede en la pizarra y el tablero que la denota. Así el maestro puede en la pizarra y en el tablero una relación proporcional y exige que la clase la explique con palabras, o vice versa; o exige que la proporcionalidad sea signada de cualquier modo puede establecer, por ejemplo, si 2 + 3 = 5, entonces 4 + 3 = 7, ó 4 + 2 = 6, ó 3 + 2 = 5.

varias formas de lenguaje de una de las mismas, y pedir los fines al mismo por imperiosa, ó de dos y exigir al otro más. Todas estas operaciones se harán con imperiosa, ya analítica ó en la pizarra.

3. Lo que se ha de mostrar en seguida en la regla de los productos y la necesidad de esta regla se demostrará fácilmente con un ejemplo como los. 24.12. «Para una cierta cantidad de material se necesitan 12 días y por ende en una cierta cantidad de material se necesitan 12 días, de que el producto de los números es igual al de los días, y después de la primera en la mente de los discípulos les conduce a aplicar lo mismo prueba de proporcionalidad de este modo:

24 : 12 : : 12 : 6 y así sucesivamente.

El punto importante, cuando se discute el anterior la regla para hallar un cuarto término dados tres. Se introduce en el caso siguiente esta relación entre 2, 12, $\frac{12}{2}$ ó entre 3, 12, $\frac{12}{3}$, donde 3, $\frac{12}{3}$ es 4.

Los discípulos se ejercitarán en hallar por la regla, cuatro términos de los ejemplos sencillos en que ya los han hallado por imperiosa: la verificación, cuando los hayan pasado en caso raro: los imprimirá la regla en la memoria, y los dará más confianza cuando la apliquen en casos en que la aplicación no los basta.

4. Ejercitando en problemas por proporción el maestro debe, como en otras operaciones, se constatación con el mismo objeto de la proporción, más exige la constatación del primer principio que la regla. Así en el problema «en 8 varas de 4 h, cuánto costaría 12 varas?» El principio es : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, como el precio de 8 r. es el de 12 varas; ó lo que según la traducción en palabras de esta manera: «12 de 4 h.» En el problema «en qué tiempo 12 hombres harán una porción de trabajo que 10 hombres pueden hacer en 7 días.» el principio es «más hombres, más pronto» y por eso $\frac{10}{12}$ es 4 h. 10 hombres, como el tiempo de 10 hombres es el de 12, lo que traduce en 10 : 12 : : 7 : 8.75 Este mismo problema sirve para mostrar que la proporción inversa define el mismo resultado que la directa, aunque en los primeros ejemplos será preciso detenerse para familiarizar

al discípulo con él. Si el trabajo es penoso con este espíritu, el discípulo desmorona por el mismo la correspondencia en todo de valores en el mundo legal al nivel que en la vida, más de que nada, uno de los pocos se acompaña de cantidades homogéneas.

No es necesario discutir las razones según abstractas, pero la duda sobre las que han sido elegidas es bastante para guiar al maestro en todo lo demás.

3.º

Facilidad de la computación

El maestro quiere en la primera las reglas de sus discípulos en la práctica, haciendo lo cual se dirige en simplemente poner las al alcance de la inteligencia. En la primera que él les dice se propone, como ya queda indicado, un doble objeto: trabajo intelectual y la fidelidad de computación.

Después lo primero, se dice que el tema principalmente en vista cuando con ayuda de los discípulos resuelve problemas en la práctica y también en los ejercicios que ellos ejecutan en sus papeles y en sus casas, ejecutan en que los reglas expuestas y resuelve rápidamente los pasos de todas las operaciones. Para conseguir también lo mismo, recurre a ejercicios de una naturaleza diferente. Los primeros son los de cálculo mental. La importancia de los ejercicios tales que ayudan al discípulo a comprender las reglas, debe haberse constituido naturalmente en el curso de las operaciones sobre el método de aplicar las diversas reglas; y es evidente que para este objeto no son solamente trabajo, sino independientes, pero en cuanto a dar facilidad para la aplicación de los principios y para que el discípulo tenga en su memoria las operaciones que ha aprendido, estos ejercicios se han de hacer sistemáticamente durante todo el curso. Su gran recomendación es que más de una especie de una práctica posible; sobre todas, las cuestiones de tiempo, las segundas son las ejercicios en práctica ejecutados por la clase al dictado. [187]

disciplinada, el primer deber del maestro es hacer intencionalmente esto en todo y constantemente, porque la de hacer presente que el maestro tiene las operaciones dictadas a los alumnos pronto que el discípulo da de su inteligencia en ella. Durante el trabajo, señalar de que los discípulos no se afanan más al verlos por cualquier de copiarlos. El mayor impedimento de esto es una buena moral en la clase, si en esta falta la moral, ninguna cosa más bastará. Preocupa a este mayor que a inspeccionar la falta por cualquier arreglo material, que no es nada disciplinario. Por otra parte, es decir que debe evitar cualquier arreglo que ocasiona tentación en el discípulo, y en todo caso ejercer el grado de vigilancia, que más la inclinarán más sistemáticamente como antes. Toda falta de una especie debe ser tratada seriamente, porque es "verdad absoluta al honor de la clase, que un maestro jamás debe permitir cualquier tentación como el caso propio. En estos ejercicios el maestro debe conceder el tiempo razonable para el trabajo y al espíritu de planeación en que a veces que como él espera hacer que el último de los discípulos resuelva, mucho tiempo perdidos inevitablemente en copiarlos. Cuando se propone que el ejercicio se haga en la primera moral, debe seguir un plan bien entendido para que el discípulo tome parte en el trabajo, y sólo solamente tendrá que comprender los resultados del trabajo que cada uno de los tres criterios ha de ser considerado según su importancia, a saber: exactitud, rapidez y claridad.